

MATEMATIKA 11. osztály

I. n-edik gyök

1. Végezd el a következő gyökvonásokat! Indokold eredményeid a gyökvonás definíciója alapján!

$$\begin{array}{llll} a) \sqrt[3]{8}; & c) \sqrt[3]{27}; & e) \sqrt[3]{125}; & g) \sqrt[6]{1000000} \\ b) \sqrt[4]{16}; & d) \sqrt[5]{32}; & f) \sqrt[4]{10000}; & \end{array}$$

2. Végezd el a következő gyökvonásokat!

(Kell tudni hozzá: $\sqrt[n]{a^n} = a$, ha n páratlan; valamint
 $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, ha n páros.)

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt[6]{a^6}; & c) \sqrt[10]{c^{20}}; \\ b) \sqrt[13]{b^{13}}; & d) \sqrt[5]{a^{15}} \end{array}$$

3. Hozz ki a gyökjel elé, amit tudsz, majd vonj össze!

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162}; & b) \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{3} \end{array}$$

4. Írd fel egyetlen gyökjellel a következő kifejezést és hozd a lehető legegyszerűbb alakra!

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[4]{2}}; & c) \sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[4]{2}}; \\ b) \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{5}}; & d) \sqrt{a^3 \sqrt[4]{a}} \end{array}$$

5. Írd fel egyetlen gyökjellel a következő kifejezést, és hozd a lehető legegyszerűbb alakra!

$$\begin{array}{l} a) \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{2}; \\ b) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}; \\ c) \frac{\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}; \\ d) \frac{\sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[4]{c}}{\sqrt{c^3}} \end{array}$$

6. Számítsd ki számológép nélkül a pontos értékét!

$$\begin{array}{l} a) \sqrt[3]{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{10} + \sqrt{2}}; \\ b) \sqrt[5]{7 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7 + \sqrt{17}} \end{array}$$

II. Exponenciális egyenletek

1. típus: Ha két tagból áll az egyenlet

1. Oldja meg a következő exponenciális egyenleteket!

a) $3^x = 9$;

b) $2^x = 32$;

c) $10^x = 1000$

d) $4^x = 16$;

e) $10^x = 0,001$;

f) $3^x = \frac{1}{9}$;

g) $25^x = 1$;

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$;

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$;

j) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$;

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$;

l) $2^x = \sqrt{2}$;

m) $5^x = \sqrt[3]{5}$;

n) $5^x = 5 \cdot \sqrt[3]{5}$;

o) $2^x = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

p) $7^x = \frac{1}{\sqrt{7}}$;

q) $2^{x+1} = 16$;

r) $6^{x-3} = 36$;

s) $\left(\frac{1}{3}\right)^{7-x} = \frac{1}{27}$;

t) $10^{6x-4} = 10000$;

u) $4^{2-5x} - 1 = 0$;

v) $5^{2-3x} - 24 = 1$

w) $7^x = 0$

2. típus: Ha kettőnél több tagból áll az egyenlet.

2. Oldja meg a következő exponenciális egyenleteket!
elsőfokúra visszavezethető exponenciális egyenletek:

a) $4^x + 4^{x+1} = 320$;

b) $2^x + 2^{x-3} = 18$;

c) $3^x - 3^{x-2} = 24$;

d) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \frac{40}{3}$

e) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$;

másodfokúra visszavezethető exponenciális egyenletek:

f) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$;

g) $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$;

h) $2^x - 0,5^x = 3,75$;

i) $9^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 69 = 0$;

j) $3^{4-x} + 3^{x-1} = 12$;

III. Logaritmius egyenletek

7. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_4(2x + 12) = 2$

b) $\lg(x^2 + 1) = -1$

c) $\log_3(\sqrt{x+1} + 1) = 2$ (Matematika középszintű érettségi feladat, 2005)

c) $\log_2(x^2 + 13) = \log_2(7x + 1)$

d) $\log_3(x - 2) + \log_3(x - 3) = \log_3 2$

e) $\log_4(x + 20) = \log_2 x$

f) $\log_2(\log_4 x) = -1$

7. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\left. \begin{array}{l} x + y = 9 \\ 2^x + 2^y = 258 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} x - y = 8 \\ \log_2 x + \log_2 y = 7 \end{array} \right\}$

8. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert!

a) $\left. \begin{array}{l} 2^{x+1} + 2^y = 96 \\ 2^x + 2^{y+1} = 144 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} \lg x + \lg y = 5 \\ \lg x^2 - \lg y = 1 \end{array} \right\}$

9. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $15^{5-3x} \leq 225$

b) $\left(\frac{1}{12}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{12}\right)^{10-x}$

c) $10^{x^2+1} < 100$

IV. TRIGONOMETRIA

Nevezetes szögek szögfüggvényértékei

1. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)
 $\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \sin 60^\circ$
2. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)
$$\frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sin 30^\circ}$$
3. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)
$$\frac{\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ - 2\operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$
4. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)
$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}$$
5. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)
$$\frac{3 - 2\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ}$$
6. Oldjuk meg a következő egyenleteket (fokban és radiánban is):
 - a. $\sin x = 0,5$
 - b. $\sin x = -0,9$
 - c. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - d. $\sin x = 1$
 - e. $\sin x = 0$
 - f. $\sin x = -1$
 - g. $\sin x = 2$
 - h. $\cos x = 0,5$
 - i. $\cos x = -0,6$
 - j. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - k. $\cos x = 1$
 - l. $\cos x = 0$
 - m. $\cos x = -1$
 - n. $\cos x = -1,5$
 - o. $\operatorname{tg} x = 0,7$
 - p. $\operatorname{tg} x = -2,5$
 - q. $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 - r. $\operatorname{tg} x = 1$
 - s. $\operatorname{tg} x = 0$
 - t. $\operatorname{tg} x = -1$
 - u. $\operatorname{tg} x = -5$
 - v. $\operatorname{ctg} x = 1,9$
 - w. $\operatorname{ctg} x = -7,1$
 - x. $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 - y. $\operatorname{ctg} x = 1$
 - z. $\operatorname{ctg} x = 0$
 - aa. $\operatorname{ctg} x = -1$
 - bb. $\operatorname{ctg} x = -3$

7. Oldjuk meg a következő egyenleteket (fokban és radiánban is):

- a. $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
- b. $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$
- c. $\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6 = 0$
- d. $2\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$
- e. $3\sin^2 x - \cos^2 x = 3$
- f. $3\cos^2 x - \sin^2 x = 2$

Színusztétel

1. Egy háromszög két szöge 40° -os és 65° -os. A 40° -os szöggel szemközti oldal 8 cm. Számolja ki a másik két oldalt!
2. Egy háromszög két oldala 5 cm és 7,3 cm. A 7,3 cm-es oldallal szemközti szög 34° -os. Mekkora a másik két szög?
3. Egy háromszög két szöge 32° és 55° . A 32° -os szöggel szemben levő oldal 10 cm. Mekkora a többi oldal?
4. Egy háromszög egyik oldala 2 cm-rel nagyobb, mint a másik. E két oldallal szemközti szögek 46° és $77,3^\circ$. Mekkora az oldalak?
5. Egy háromszög egyik oldala 1 cm-rel nagyobb, mint a másik. E két oldallal szemközti szögek $78,5^\circ$ és $40^\circ 12'$. Mekkora az oldalak?
6. Egy háromszög két oldala 13 cm és 15 cm. A 15 cm-rel szemközti szöge $91^\circ 25'$. Mekkora a többi szög és oldal?

Koszinusztétel

7. Egy háromszög két oldala 10 m és 8 m. Közbezárt szögük 75° -os. Számítsd ki a harmadik oldalt!
8. Egy háromszög oldalai 4 cm, 6 cm és 7 cm. Mekkora a 7 cm-es oldallal szemközti szög? Számítsd ki a többi szögét is!
9. Egy háromszög két oldala 7 cm és 9 cm, bezárt szögük 93° -os. Mekkora a harmadik oldal? Mekkora a másik két szög?
10. Egy paralelogramma átlói 10 és 17 cm-esek. Bezárt szögük $100^\circ 45'$. Mekkora a paralelogramma oldalai?
11. Egy háromszög oldalai 4 cm, 7 cm és 10 cm. Mekkora a legnagyobb szöge? Szögei szerint milyen típusú háromszög?
12. Egy paralelogramma átlói 3 m és 5 m-esek. A paralelogramma egyik oldala 2,2 m-es. Mekkora a szöget zárják be az átlók?
13. Egy paralelogramma két oldala 4,25 cm és 11,5 cm hosszú. Az egyik átlója 9 cm-es. Mekkora a paralelogramma átlói?

V. KOORDINÁTAGEOMETRIA

Pontok, vektorok, szakaszok, egyenesek

1. Adott az $A(3; 2)$ és $B(-4; -2)$ pont.
 - a. Adja meg a \overrightarrow{AB} vektort koordinátáival!
 - b. Adja meg az AB szakasz felezőpontját koordinátáival!
 - c. Adja meg az AB szakasz hosszát!
 - d. Adja meg a C pontot koordinátáival úgy, hogy az AC szakasz felezőpontja B pont legyen.

2. Adott az $A(-1; 3)$ és $B(5; -3)$ pont.
 - a. Adja meg a \overrightarrow{BA} vektort koordinátáival!
 - b. Adja meg az AB szakasz hosszát!
 - c. Adja meg a C pontot koordinátáival úgy, hogy az BC szakasz felezőpontja A pont legyen.

3. Egy háromszög csúcsai $A(3; 4)$, $B(-5; 3)$, $C(2; -1)$.
 - a. Számolja ki az \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} és \overrightarrow{CA} vektorok koordinátáit!
 - b. Számolja ki az oldalak felezőpontjainak koordinátáit!
 - c. Számolja ki az AB oldal harmadolópontjainak koordinátáit!
 - d. Számolja ki az oldalak hosszát!
 - e. Írd fel az oldalak felezőmerőlegesének egyenletét!
 - f. Számolja ki a felezőmerőlegesek metszéspontját! A háromszög melyik nevezetes pontja ez?
 - g. Írd fel a háromszög A csúcsán átmenő magasságának egyenletét!
 - h. Írd fel a háromszög oldalainak egyenletét!
 - i. Számolja ki az BC oldal és a BC oldalhoz tartozó magasságvonal metszéspontjának koordinátáit!

4. Adott az ABC háromszög. Csúcsai: $A(5; 1)$, $B(-2; 2)$, $C(0; -3)$.
 - a. Adja meg a B csúcsból induló magasságvonal egyenletét! (Jelöld m_b -vel!)
 - b. Adja meg az AC oldal egyenletét! (Jelöld b-vel!)
 - c. Számolja ki és Adja meg m_b és b metszéspontjának koordinátáit!

5. Adott az ABC háromszög. Csúcsai: $A(-3; -1)$, $B(4; 1)$, $C(3; -2)$.
 - a. Adja meg a C csúcsból induló magasságvonal egyenletét! (Jelöld m_c -vel!)
 - b. Adja meg az AB oldal egyenletét! (Jelöld c-vel!)
 - c. Számolja ki és Adja meg m_c és c metszéspontjának koordinátáit!

Körök

6. Ábrázolja koordináta-rendszerben, majd írd fel annak a körnek az egyenletét, aminek középpontja (C) és sugara (r) a következők!
 - a. $C(4; 5)$, $r = 3$;
 - b. $C(5; -7)$, $r = 4$;
 - c. $C(-2; -3)$, $r = 1$;
 - d. $C(2; 0)$, $r = 10$;
 - e. $C(0; -1)$, $r = 1$;
 - f. $C(0; 0)$, $r = 2$

7. Határozzuk meg a következő egyenletekkel felírt körök középpontjának koordinátáit és sugarát! Ábrázoljuk a köröket!

a. $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$;

b. $(x - 2)^2 + (y - 1,5)^2 = 100$

c. $(x - 8)^2 + (y + 1)^2 = 1$;

d. $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$;

e. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$;

f. $x^2 + (y + 7)^2 = 64$;

g. $x^2 + y^2 = 9$